## XIX Российский Фестиваль юных математиков

*Адлер. 15 октября 2008.*

*Четвертый тур. Лига тактик*

**1.** Даны прямоугольники $ABCD$ и $AEFG$, причем точки $B$, $E$, $D$ и $G$ лежат на одной прямой именно в таком порядке. Прямые $BC$ и $GF$ пересекаются в точке $T$, а прямые $DC$ и $EF$ — в точке $H$. Докажите, что точки $A$, $H$ и $T$ лежат на одной прямой.

**2.** Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные натуральные числа. Обозначим через $S_i$ сумму всех этих чисел, кроме $a_i$. Какое максимальное значение может принимать выражение

$$\frac{(a_1, S_1) + (a_2, S_2) + \ldots + (a_n, S_n)}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

в зависимости от $n$ при $n \geqslant 2$?

**3.** Площадь вписанного четырехугольника $ABCD$ равна 8. На плоскости нашлась точка $O$ такая, что $OA + OB + OC + OD = 8$. Докажите, что $ABCD$ — равнобочная трапеция или квадрат.

**4.** Докажите, что при $n > 2$ уравнение $x^n - y^n = 2^k$ не имеет решений в натуральных числах.

**5.** Докажите, что среди членов последовательности $a_n = [n\sqrt{2}] + [n\sqrt{3}]$ бесконечно много как четных, так и нечетных чисел.

**6.** Числа $a$ и $b$ принадлежат оттрезку $[0, 1]$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+a+b} \leqslant 1 - \frac{a+b}{2} + \frac{ab}{3}.$$

**7.** Дано натуральное число $n > 1$. Найдите все пары целых чисел $s$ и $t$, для которых уравнения $x^n + sx - 2007 = 0$ и $x^n + tx - 2008 = 0$ имеют хотя бы один общий вещественный корень.

**8.** Доска $n \times n$ $(n \geqslant 3)$ раскрашена в шахматном порядке, причем поле в левом верхнем углу черное. Белые поля перекрашиваются в черные по следующему правилу: выбирается какой-либо прямоугольник $2 \times 3$ или $3 \times 2$, в котором три клетки белые и три — черные, и красится в черный цвет. При каких $n$ за несколько шагов можно всю доску сделать черной?

**9.** Дан правильный тетраэдр $ABCD$. На ребре $CD$ берутся всевозможные точки $M$. Докажите, что ортоцентры всех треугольников $AMB$ лежат на одной окружности.

**10.** В графе 1000 вершин, сумма их степеней больше чем 239000. Если две вершины не соединены ребром и сумма их степеней не меньше чем 478, то их можно соединить ребром. Докажите, что такими операциями можно получить вершину, соединенную ребрами со всеми оставшимися 999 вершинами.


## XIX Российский Фестиваль юных математиков

*Адлер. 15 октября 2008.*

*Четвертый тур. Лига тактик*

**1.** Даны прямоугольники $ABCD$ и $AEFG$, причем точки $B$, $E$, $D$ и $G$ лежат на одной прямой именно в таком порядке. Прямые $BC$ и $GF$ пересекаются в точке $T$, а прямые $DC$ и $EF$ — в точке $H$. Докажите, что точки $A$, $H$ и $T$ лежат на одной прямой.

**2.** Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные натуральные числа. Обозначим через $S_i$ сумму всех этих чисел, кроме $a_i$. Какое максимальное значение может принимать выражение

$$\frac{(a_1, S_1) + (a_2, S_2) + \ldots + (a_n, S_n)}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

в зависимости от $n$ при $n \geqslant 2$?

**3.** Площадь вписанного четырехугольника $ABCD$ равна 8. На плоскости нашлась точка $O$ такая, что $OA + OB + OC + OD = 8$. Докажите, что $ABCD$ — равнобочная трапеция или квадрат.

**4.** Докажите, что при $n > 2$ уравнение $x^n - y^n = 2^k$ не имеет решений в натуральных числах.

**5.** Докажите, что среди членов последовательности $a_n = [n\sqrt{2}] + [n\sqrt{3}]$ бесконечно много как четных, так и нечетных чисел.

**6.** Числа $a$ и $b$ принадлежат оттрезку $[0, 1]$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+a+b} \leqslant 1 - \frac{a+b}{2} + \frac{ab}{3}.$$

**7.** Дано натуральное число $n > 1$. Найдите все пары целых чисел $s$ и $t$, для которых уравнения $x^n + sx - 2007 = 0$ и $x^n + tx - 2008 = 0$ имеют хотя бы один общий вещественный корень.

**8.** Доска $n \times n$ $(n \geqslant 3)$ раскрашена в шахматном порядке, причем поле в левом верхнем углу черное. Белые поля перекрашиваются в черные по следующему правилу: выбирается какой-либо прямоугольник $2 \times 3$ или $3 \times 2$, в котором три клетки белые и три — черные, и красится в черный цвет. При каких $n$ за несколько шагов можно всю доску сделать черной?

**9.** Дан правильный тетраэдр $ABCD$. На ребре $CD$ берутся всевозможные точки $M$. Докажите, что ортоцентры всех треугольников $AMB$ лежат на одной окружности.

**10.** В графе 1000 вершин, сумма их степеней больше чем 239000. Если две вершины не соединены ребром и сумма их степеней не меньше чем 478, то их можно соединить ребром. Докажите, что такими операциями можно получить вершину, соединенную ребрами со всеми оставшимися 999 вершинами.